Exercice d'après BAC S ANTILLES 1995

Le but de l'exercice est de construire, à la règle et au compas, les images des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $z^2 - 6z + 12 = 0$.

1) a) Résoudre (E). Les solutions sont notées s et $\bar{s}$, s étant celle dont la partie imaginaire est positive.

b) Calculer le module et un argument de s. En déduire le module et un argument de $\bar{s}$.

2) a) Soit le nombre complexe $s - 4$. Écrire ce nombre sous la forme algébrique, puis sous la forme exponentielle.

b) Calculer le module et un argument du nombre $\dfrac{s}{s-4}$.

En déduire le module et un argument de $\dfrac{\bar{s}}{\bar{s}-4}$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit A le point d'affixe 4, B le point d'affixe 2 et C le point d'affixe 6. M et N sont les points d'affixes s et $\bar{s}$.

a) En interprétant géométriquement les résultats de la question 2, démontrer que les points O, A, M, N sont sur un même cercle, à préciser.

b) Montrer que les points M et N appartiennent au cercle de diamètre $[BC]$.

c) En déduire la construction des points M et N.

Solution

1) a) $\Delta = 36 - 48 = -12$. S = $\{3 + \sqrt{3}\,i, 3 - \sqrt{3}\,i\}$. Donc $s = 3 + \sqrt{3}\,i$.

b) $|s| = 2\sqrt{3}$ et $\arg(s) \equiv \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$. Donc $|\bar{s}| = 2\sqrt{3}$ et $\arg(\bar{s}) \equiv -\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

2) a) $s - 4 = -1 + \sqrt{3}\,i$. $s - 4 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

b) $\dfrac{s}{s-4} = \dfrac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc $\left|\dfrac{s}{s-4}\right| = \sqrt{3}$ et $\arg(\dfrac{s}{s-4}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

D'où $\left|\dfrac{\bar{s}}{\bar{s}-4}\right| = \sqrt{3}$ et $\arg(\dfrac{\bar{s}}{\bar{s}-4}) \equiv \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

3) a) $\dfrac{s}{s-4} = \dfrac{z_M - z_O}{z_M - z_A}$. Donc d'après (2), $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et le triangle AOM est rectangle en M, donc M appartient au cercle de diamètre $[AO]$.
De même pour N.

b) $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BM}) \equiv (\overrightarrow{CM}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) \equiv -\arg(z_M - z_C) + \arg(z_M - z_B) = \arg(\dfrac{s-2}{s-6})$.

Or, $\dfrac{s-2}{s-6} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$, donc $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BM}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}$ donc M appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

N appartient au cercle de diamètre $[BC]$ se démontre en étudiant $\dfrac{\bar{s}-2}{\bar{s}-6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

c) M et N sont les deux points d'intersection des deux cercles.