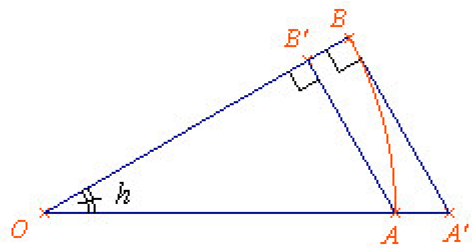
Aire d'un disque

Soit à calculer l'aire d'un disque de rayon r.
Soit $\mathrm{A}(\theta)$ l'aire d'une portion de disque de rayon r, d'angle au centre θ.
L'aire additionnelle apportée par un accroissement h de la valeur de θ s'exprime donc par $\mathrm{A}(\theta + h) - \mathrm{A}(\theta)$.
Dans la figure ci-dessous, il s'agit de l'aire de la portion de disque de centre O, de rayon r, d'angle au centre $h = A\hat{O}B$.



Elle est supérieure à l'aire du triangle AOB', où B' est le projeté orthogonal de A sur (OB).
Elle est inférieure à l'aire du triangle $A'OB$, où A' est le point d'intersection de la demi-droite $[OA)$ avec la tangente au disque issue de B.

L'aire du triangle AOB' vaut : $\frac{1}{2} \times OB' \times AB' = \frac{1}{2} r^2 \sin(h)\cos(h)$.

L'aire du triangle $A'O'B'$ vaut : $\frac{1}{2} \times OB \times BA' = \frac{1}{2} rOA' \sin(h) = \frac{1}{2} r^2 \tan(h)$.

Alors :
$\frac{1}{2} r^2 \sin(h)\cos(h) \leq \mathrm{A}(\theta + h) - \mathrm{A}(\theta) \leq \frac{1}{2} r^2 \tan(h)$, d'où, après division par $h > 0$:

$$\frac{\frac{1}{2} r^2 \sin(h)\cos(h)}{h} \leq \frac{\mathrm{A}(\theta + h) - \mathrm{A}(\theta)}{h} \leq \frac{\frac{1}{2} r^2 \tan(h)}{h}.$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0} \cos(h) = 1$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2} r^2 \sin(h)\cos(h)}{h} = \frac{1}{2} r^2$, et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\tan(h)}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2} r^2 \tan(h)}{h} = \frac{1}{2} r^2$, donc par le théorème des gendarmes, A est dérivable à droite en θ, et $\mathrm{A}_d'(\theta) = \frac{1}{2} r^2$.

Par la même méthode, A est dérivable à gauche en θ, et $\mathrm{A}_g'(\theta) = \frac{1}{2} r^2$.

A est donc la primitive s'annulant en 0 de la fonction (constante, de variable notée θ) : $\theta \mapsto \frac{1}{2} r^2$.

Donc $\mathrm{A}(\theta) = \displaystyle\int_0^\theta \frac{1}{2} r^2 dt = \frac{1}{2} \theta r^2$.

L'aire d'une portion de disque de rayon r, d'angle au centre θ vaut $\frac{1}{2} \theta r^2$.

En particulier, l'aire du disque vaut $\frac{1}{2} 2\pi r^2 = \pi r^2$.